

Chapitre 9

Fonctions usuelles

Plan du chapitre

1	Complément sur les fonctions réciproques	2
1.1	Dérivée de f^{-1}	2
1.2	Théorème de la bijection monotone	2
2	Logarithme et exponentielle	3
2.1	Logarithme.	3
2.2	Exponentielle	4
3	Puissance.	5
3.1	Fonction puissance entière	5
3.2	Fonction racine n -ième et puissance rationnelle	6
3.3	Fonction puissance réelle	7
3.4	Fonction puissance x (ou exponentielle généralisée)	8
4	Croissances comparées	8
5	Fonctions circulaires	9
6	Fonctions circulaires réciproques	9
6.1	Fonction arcsinus	9
6.2	Fonction arccosinus	11
6.3	Fonction arctangente	12
7	Fonctions hyperboliques	14
7.1	Fonctions ch et sh	14
7.2	Fonction th.	15
8	Fonctions exponentielles complexes	16
9	Méthodes pour les exercices.	18

Hypothèse

Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux (i.e. non vides et non singletons).

1 Complément sur les fonctions réciproques

1.1 Dérivée de f^{-1}

Théorème 9.1 – Dérivée de f^{-1}

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective, donc elle admet une réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$.

1. Pour tout $y \in J$, la fonction f^{-1} est dérivable en y si et seulement si f est dérivable en $f^{-1}(y)$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Lorsque cela est vérifié, on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

2. Plus généralement, si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration. Admis pour le moment. □

1.2 Théorème de la bijection monotone

On a vu que $f : E \rightarrow F$ est surjective ssi $F = f(E)$. Donc si f est bijective, alors nécessairement $F = f(E)$.

Théorème 9.2 – Théorème de la bijection monotone

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application **continue** et **strictement monotone** (sur I). Alors :

- L'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle.
- f est une bijection de I sur J .
- La fonction $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f .

Démonstration. Admis. □

Remarque. Soit $x \in I$ et $y \in f(I)$. On remarque que :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$$

En particulier, la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ se déduit de la courbe $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2 Logarithme et exponentielle

2.1 Logarithme

Théorème 9.3 – Logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie comme étant l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1.

La preuve s'appuie sur des notions que l'on précisera dans le chapitre de primitives et d'intégration qui va suivre.

Théorème 9.4 – Propriétés graphiques / analytiques de $\ln$

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ (on précisera qui est e plus loin).
- $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

$\ln$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

Théorème 9.5 – Propriétés algébriques de $\ln$

Soit $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration. On ne montre que la propriété encadrée (dite fondamentale), le reste s'en déduit aisément.

□

Définition 9.6 – Logarithme en base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a , noté $\log_a$, la fonction définie par :

$$\log_a : x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

En particulier, on a $\log_a(a) = 1$ et même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log_a(a^n) = n$. En physique ou en SI, on emploie surtout la fonction $\log_{10}$, tandis qu'en informatique on emploie plutôt $\log_2$.

2.2 Exponentielle

$\ln$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Définition 9.7

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est définie comme étant la réciproque de la fonction $\ln$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pourra utiliser la notation $e^x := \exp(x)$.

On a en particulier :

$$\forall x \in \dots \quad \forall y \in \dots \quad y = e^x \iff x = \ln y$$

$$\forall x \in \dots \quad e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \dots \quad \ln e^x = x$$

Malgré que $\exp$ soit une réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, on considère que $\exp$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et non de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$). On garde cependant en tête qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque $\exp$ est la réciproque de $\ln$, les courbes représentatives de $\exp$ et de $\ln$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y = x$.

Théorème 9.8 – Propriétés graphiques / analytiques de $\exp$

- $e^0 = 1$
- $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0$$

$\exp$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Démonstration. On ne montre que la seconde assertion.

□

Théorème 9.9 – Propriétés algébriques de exp

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

Démonstration. En utilisant les propriétés de la fonction $\ln$. □

Définition 9.10

On note $e := \exp(1) \approx 2.71828$. Le réel e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper.

Cette notation pourrait conduire à une ambiguïté sur ce que vaut e^n pour n un entier. Par exemple si $n = 3$, est-ce que e^3 désigne $\exp(3)$ ou bien $e \times e \times e$? En réalité, grâce à la propriété fondamentale, ces deux valeurs coïncident :

$$\exp(3) = \exp(1 + 1 + 1) = \exp(1) \times \exp(1) \times \exp(1) = e \times e \times e$$

On peut donc noter e^3 pour désigner ce réel. C'est en fait pour cette raison qu'on utilise la notation e^x pour $\exp(x)$!

3 Puissance

On s'intéresse tout d'abord à la fonction $x \mapsto x^\alpha$ avec (dans le cas le plus général) $\alpha \in \mathbb{R}$. Selon la valeur de α , on définira cette fonction différemment.

3.1 Fonction puissance entière

Définition 9.11 – $x \mapsto x^m$

Soit $m \in \mathbb{Z}^*$. On définit la fonction puissance m par :

• Si $m \geq 1$,

• Si $m \leq -1$,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^m = \underbrace{x \times \dots \times x}_{m \text{ fois}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^m = \frac{1}{x^{|m|}} \end{aligned}$$

Théorème 9.12

Soit $m \in \mathbb{Z}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^m$ est dérivable et :

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = mx^{m-1} \quad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

3.2 Fonction racine n -ième et puissance rationnelle

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \mapsto x^{2p+1}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En particulier, f admet une réciproque :
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g : x \mapsto x^{2p}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. En particulier, $g|_{\mathbb{R}_+}$ admet une réciproque :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{2p+1}} = \sqrt[2p+1]{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{2p}} = \sqrt[2p]{x} \end{aligned}$$

Cela justifie la définition suivante.

Définition 9.13 – $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \in 2\mathbb{N} + 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\sqrt[n]{x}$ comme étant (l'unique) réel tel que $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
- Si $n \in 2\mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\sqrt[n]{x}$ comme étant (l'unique) réel positif tel que $(\sqrt[n]{x})^n = x$.



$\sqrt[p]{x}$ n'a de sens que si $x \geq 0$, par contre $\sqrt[2p+1]{x}$ a un sens pour tout réel x !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse maintenant à la dérivée de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$. On exclut d'emblée le cas $n = 1$ qui est évident.

Théorème 9.14

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est dérivable $D_f \setminus \{0\}$. De plus, pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Idée générale de la preuve. On fait une disjonction de cas selon la parité de n . Si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors h est la réciproque de $f : x \mapsto x^{2p+1}$. En appliquant la propriété 9.1, on vérifie que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $h'(y) = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}+1}$. Si n est pair, on reprend le même cheminement pour aboutir au résultat voulu. $\square$

Remarque. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on peut définir la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ comme

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

On a donc $f = g \circ h$ avec $g : x \mapsto x^p$ et $h : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$. Les ensembles de définitions et de dérivabilité de F sont à déterminer au cas par cas, selon la parité et le signe des entiers p et q . Cependant, pour tout x en lequel f est dérivable, on a encore :

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

3.3 Fonction puissance réelle

Définition 9.15 – $x \mapsto x^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

$$p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \boxed{x^\alpha := e^{\alpha \ln x}}$$

Remarque. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, la fonction p_α coïncide (sur $\mathbb{R}_+^*$) avec les fonctions puissances vues précédemment.

Si α est égal (par exemple) à 2, alors la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est en fait la fonction carrée définie par $f(x) = x \times x$, et est définie sur $\mathbb{R}$ (et non $\mathbb{R}_+^*$). Cependant, si α peut prendre une valeur (réelle) non rationnelle, il faut partir du principe que $x \mapsto x^\alpha$ représente la fonction p_α ci-dessus, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

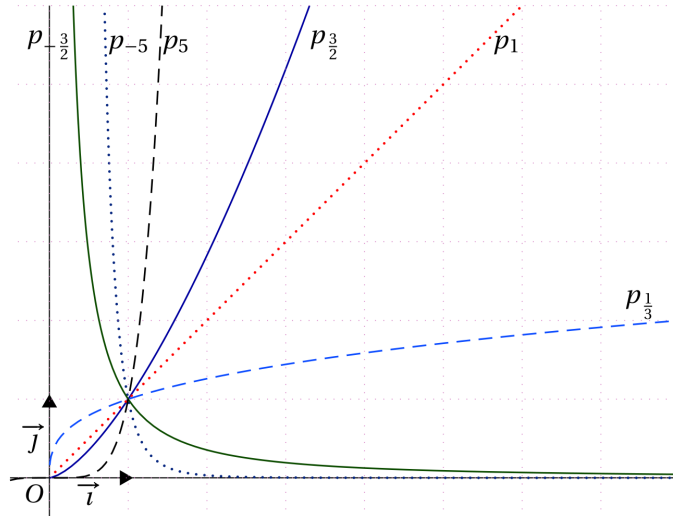


Dès que vous êtes confronté à une écriture du type x^y avec y un **réel quelconque** (qui peut être non rationnel), il faut systématiquement utiliser la réécriture $x^y = e^{y \ln x}$!

Théorème 9.16 – Dérivée de f_α

p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$p'_\alpha(x) = \frac{1}{x} \alpha e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$



3.4 Fonction puissance x (ou exponentielle généralisée)

Définition 9.17

Pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$a^x := e^{x \ln a} > 0$$

Cette notation est cohérente avec la fonction exponentielle : lorsque $a = e$, en effet, $a^x := e^{x \ln e} = e^x$.

Théorème 9.18

Soit $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

Démonstration. En utilisant la définition de a^x et les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. □

4 Croissances comparées

Les propriétés dites “croissances comparées” permettent de lever certaines formes indéterminées dans un calcul de limites.

Théorème 9.19 – Croissances comparées

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

1. Croissances comparées en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

2. Croissances comparées en $-\infty$ et 0 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x|^\beta x^\alpha = 0$

On peut apprendre ces formules, mais il est plus intéressant de retenir ce principe général : lorsqu'on obtient une *forme indéterminée*¹ impliquant des fonctions de la forme $e^{\alpha x}$, x^β et $(\ln x)^\gamma$, la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance, qui l'emporte sur la fonction logarithme.

5 Fonctions circulaires

Théorème 9.20

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin x$$

Rappel : la fonction tangente est définie sur

$$D_{\tan} := \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)$$

Théorème 9.21 – Propriétés graphiques / analytiques de tan

- La fonction tan est continue et dérivable (sur $D_{\tan}$) et

$$\forall x \in D_{\tan} \quad \tan'(x) =$$

En particulier, tan est strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$
 $x > -\frac{\pi}{2}$ $x < \frac{\pi}{2}$

Comme tan est π -périodique, la fonction tan est strictement croissante sur chaque intervalle inclus dans $D_{\tan}$ mais pas sur $D_{\tan}$ tout entier (ou même une réunion de deux de ces intervalles).

6 Fonctions circulaires réciproques

6.1 Fonction arcsinus

La fonction sin est *continue et strictement croissante* sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ sur l'intervalle $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]\right) = [-1, 1]$.

Définition 9.22 – arcsinus

La fonction arcsinus est la fonction réciproque de $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$. Elle est notée :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

1. Pour les croissances comparées, elles seront de la forme $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Théorème 9.23 – Propriétés graphiques de arcsin

- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ $\arcsin(0) = 0$ $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall y \in [-1, 1] \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$
- arcsin est impaire.
- arcsin est strictement croissante.
- arcsin est continue (sur $[-1, 1]$).

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Théorème 9.24 – Identités avec arcsin

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \sin(\arcsin(y)) = y$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\arcsin \text{ est dérivable sur }]-1, 1[\text{ et } \forall y \in]-1, 1[\quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Démonstration.

□



$\arcsin(\sin x)$ n'est pas toujours égal à x ! Par exemple, pour $x = \pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$$

En revanche, $\sin(\arcsin(y))$ est toujours égal à y (seulement pour y dans $[-1, 1]$ puisque la fonction arcsinus n'est définie que sur $[-1, 1]$).

6.2 Fonction arccosinus

La fonction $\cos$ est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0, \pi]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur l'intervalle $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Définition 9.25 – arccosinus

La fonction arccosinus, notée $\arccos$, est la fonction réciproque de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Théorème 9.26 – Propriétés graphiques de arccos

- $\arccos(-1) = \pi$ $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ $\arccos(1) = 0$
- $\forall y \in [-1, 1] \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi$
- arccos n'est ni paire ni impaire.
- arccos est strictement décroissante.
- arccos est continue sur $[-1, 1]$.

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Théorème 9.27 – Identités avec arccos

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \arccos(\cos x) = x$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos y) = y$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\arccos \text{ est dérivable sur }]-1, 1[\text{ et } \forall y \in]-1, 1[\quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Démonstration. De même que pour arcsin, les deux premières assertions découlent du fait que arccos et $\cos|_{[0, \pi]}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. Pour la troisième assertion, on adapte la preuve précédente à arccos : le calcul montre que pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$|\sin(\arccos y)| = \sqrt{1 - y^2}$$

Or, comme $\arccos y \in [0, \pi]$, on a $\sin(\arccos y) \geq 0$, d'où on a bien $\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$. Pour la dernière assertion, on obtient de même que arccos est dérivable en tout $y \in]-1, 1[$ et

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

□



arccos(cos x) n'est pas toujours égal à x ! Par exemple pour $x = 2\pi \notin [0, \pi]$, on a

$$\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi$$

En revanche, $\cos(\arccos y)$ est toujours égal à y (seulement pour y dans $[-1, 1]$ puisque la fonction arccosinus n'est définie que sur $[-1, 1]$).

6.3 Fonction arctangente

La fonction tan est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

Définition 9.28 – arctangente

La fonction arctangente, notée $\arctan$, est la fonction réciproque de $\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

Théorème 9.29 – Propriétés de $\arctan$

- $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ $\arctan(0) = 0$ $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$
- $\arctan$ est impaire.
- $\arctan$ est strictement croissante.
- $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x) = \pm \frac{\pi}{2}$

Théorème 9.30 – Identités avec $\arctan$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \arctan(\tan(x)) = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan(y)) = y$$

$$\arctan \text{ est dérivable (sur } \mathbb{R} \text{) et } \forall y \in \mathbb{R} \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Démonstration. De même, les deux premières assertions découlent du fait que $\arctan$ et $\tan \big|_{\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

La troisième assertion se démontre avec la propriété 9.1.

□

7 Fonctions hyperboliques

7.1 Fonctions ch et sh

Définition 9.31

On définit :

- la fonction cosinus hyperbolique, notée ch :
- la fonction sinus hyperbolique, notée sh :

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$



Ne pas confondre les expressions ci-dessus avec les formules d'Euler ! Notamment, le nombre i n'intervient pas dans les définitions ci-dessus.

Théorème 9.32 – Propriétés graphiques de ch et sh

- $\text{ch}(0) = 1$ et $\text{sh}(0) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch } x \geq 1$
- ch est paire et sh est impaire.
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (cf encadré suivant pour la preuve).
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sh}(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{ch}(x) = +\infty$

Théorème 9.33 – Identités avec ch et sh

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

sh et ch sont continues et dérivables (sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x) \quad \text{et} \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] \\ &= \frac{1}{4} [e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)] \\ &= \frac{1}{4} \times 4 = 1 \end{aligned}$$

Le reste des propriétés est évident au vu des définitions de ch et sh. □

7.2 Fonction th**Définition 9.34 – Tangente hyperbolique**

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th :

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \end{aligned}$$

Théorème 9.35 – Propriétés de th

- $\text{th}(0) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 < \text{th } x < 1$
- th est impaire.
- th est strictement croissante (cf encadré suivant pour la preuve).
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{th}(x) = \pm 1$

Théorème 9.36 – Identités avec th

th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$$

8 Fonctions exponentielles complexes

On rappelle que I désigne un intervalle (donc $I \subset \mathbb{R}$) non trivial.

Théorème 9.37

Soit $\varphi : I \rightarrow \boxed{\mathbb{C}}$ une fonction dérivable.

La fonction $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{\varphi(x)} \end{cases}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \varphi'(x)e^{\varphi(x)} \end{cases}$

En pratique, le calcul est donc similaire aux exponentielles réelles : il suffit de dériver la fonction dans l'exponentielle (en considérant i comme une constante).

Exemple 1. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto e^{x+ix^2}$.

Exemple 2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $f : t \mapsto e^{i\omega t}$.

9 Méthodes pour les exercices

Le plus délicat est de retenir les nombreuses formules et propriétés de arccos, arcsin, arctan, ch, sh et th.

Méthode – Mnémotechnie pour arccos, arcsin et arctan

- Retenir l'allure des courbes des fonctions arccos, arcsin et arctan permet de retrouver les encadrés "propriétés graphiques de arccos / arcsin / arctan". En cas de doute, refaire au brouillon la symétrie des courbes de cos / sin / tan qui a permis de les construire.
- Les formules $\arccos(\cos x) = x$, $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arctan(\tan x) = x$ sont piégeuses et ne marchent que pour certains x . Pour les reconnaître, remarquez qu'on lit deux fois d'affilée "cos", "sin" et "tan" !
- Par contre, $\cos(\arccos y) = y$ est toujours vrai, pour tout y pour lequel cela a un sens. Idem pour $\sin(\arcsin y)$ et $\tan(\arctan y)$.
- On peut retrouver les expressions de $\arccos'(y)$, de $\arcsin'(y)$ et de $\arctan'(y)$ grâce à la formule $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ avec $f = \cos$, $f = \sin$ ou $f = \tan$.